Journal de l'École polytechnique
Mathématiques

Fréderic Campana, Benoît Claudon, & Philippe Eyssidieux

Représentations linéaires des groupes kählériens et de leurs analogues projectifs

Tome 1 (2014), p. 331-342.

<http://jep.cedram.org/item?id=JEP_2014__1__331_0>

© Les auteurs, 2014.
Certains droits réservés.

Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
Creative Commons attribution – pas de modification 3.0 France.
http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/

L'accès aux articles de la revue « Journal de l'École polytechnique — Mathématiques » (http://jep.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://jep.cedram.org/legal/).

Publié avec le soutien
du Centre National de la Recherche Scientifique

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques

Tome 1, 2014, p. 331–342 DOI: 10.5802/jep.12

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES KÄHLÉRIENS ET DE LEURS ANALOGUES PROJECTIFS

par Fréderic Campana, Benoît Claudon & Philippe Eyssidieux

Résumé. — Dans cette note nous établissons le résultat suivant, annoncé dans [CCE13] : si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image d'une représentation linéaire d'un groupe kählérien $\pi_1(X)$, il admet un sous-groupe d'indice fini qui est l'image d'une représentation linéaire du groupe fondamental d'une variété projective complexe lisse X'.

Il s'agit donc de la solution (à indice fini près) pour les représentations linéaires d'une question usuelle demandant si le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte est aussi celui d'une variété projective complexe lisse.

Abstract (Linear representations of Kähler groups and of their projective analogues)

In this note we establish the following result, announced in [CCE13]: if $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ is the image of a linear representation of a Kähler group $\pi_1(X)$, then it has a subgroup of finite index which is the image of a linear representation of the fundamental group of some smooth complex projective variety X'.

This result provides thus, for linear representations, the solution (up to finite index) of a usual question asking if the fundamental group of a compact Kähler manifold X is also that of a smooth complex projective variety.

Table des matières

Introduction 332
1. Une version relative du critère de Buchdahl 333
2. Application aux familles en tores 335
Références 341

Classification mathématique par sujets (2010). — 32Q15, 32Q55, 32G05, 14D07.
Mots-clefs. — Groupes kählériens, problème de Kodaira, famille lisse de tores complexes, déformations relatives.

Le second auteur bénéficie du soutien de l'ANR (projet ANR-10-JCJC-0111) et du CNRS via un séjour de recherche dans l'UMI IMPA/CNRS et tient à remercier l'IMPA pour l'accueil qu'il a reçu.

Introduction

Rappelons une question classique :

Question 0.1. — La classe des groupes kählériens [1] coïncide-t-elle avec celle des groupes projectifs ?

Nous démontrons ci-dessous le résultat partiel suivant :

Théorème 0.2. — *Si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image d'une représentation linéaire d'un groupe kählérien $\pi_1(X)$, il existe une variété projective complexe lisse X' et un sous-groupe d'indice fini de G qui est l'image d'une représentation linéaire de $\pi_1(X')$. En particulier, un groupe kählérien linéaire est virtuellement projectif.*

La motivation initiale de la question 0.1 est le *problème de Kodaira* : une variété kählérienne compacte est-elle toujours déformation d'une variété projective complexe lisse ? Une réponse affirmative [2] à ce problème impliquerait en particulier qu'une variété kählérienne compacte est toujours difféomorphe à une variété projective, et une réponse affirmative à la question précédente. Les contre-exemples fournis par C. Voisin ([Voi04], [Voi06]) concernent cependant l'aspect biméromorphe du problème, et conduisent à le reformuler seulement pour les modèles minimaux (en général singuliers) des variétés kählériennes compactes à fibré canonique pseudo-effectif [3]. Puisque le passage au modèle minimal n'affecte pas le groupe fondamental, cette reformulation du problème de Kodaira n'affecte pas non plus la conjecture de coïncidence des groupes kählérien avec leurs analogues projectifs.

La démonstration du théorème 0.2 consiste à se ramener, grâce au théorème 0.3 ci-dessous, établi dans [CCE13], au cas où X est munie d'une submersion holomorphe dont les fibres sont des tores, sur une variété complexe projective lisse Y.

Théorème 0.3. — *Soit Z une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(Z) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire de son groupe fondamental. Quitte à remplacer Z par un revêtement étale fini, la variété de Shafarevich $\mathrm{Sh}_\rho(Z)$ associée à ρ est (biméromorphe à) une variété kählérienne compacte X qui est l'espace total d'une fibration lisse en tores sur une variété de type général*

$$Z \xrightarrow{sh_\rho} X \simeq \mathrm{Sh}_\rho(Z) \xrightarrow{s_\rho} B \simeq S_\rho(Z).$$

Nous renvoyons à [CCE13] pour les notions utilisées ci-dessus. La variété X est biméromorphe à la variété de Shafarevich de Z, obtenue à partir de Z en contractant les sous-variétés sur le π_1 desquelles ρ est triviale. Les tores de la submersion $X \to S_\rho(Z)$ sont les sous-variétés maximales sur le π_1 desquelles ρ a une image abélienne dans G.

1. Un groupe de présentation finie est dit *kählérien* (resp. *projectif*) s'il peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte (resp. projective lisse).

2. Connue en dimensions 1 et 2 (Kodaira).

3. Ces modèles minimaux sont les espaces kählériens compacts à singularités terminales et fibré canonique semi-ample. Lorsque K_X n'est pas pseudo-effectif, X devrait être uniréglée et le quotient rationnel ramènerait le calcul du groupe fondamental au cas où K_X est pseudo-effectif.

La fibration $X \to B$ est donc un modèle biméromorphe (particulièrement agréable) de la fibration d'Iitaka-Moishezon de $\mathrm{Sh}_\rho(Z)$.

Nous résolvons ensuite dans ce cas très particulier le problème de Kodaira. Nous montrons en effet ci-dessous que X admet (après changement de base fini) une déformation sur sa fibration jacobienne [4] $J(X/B)$ (proposition 2.5). Il est alors possible de montrer que $J(X/B)$ admet des petites déformations au-dessus de la variété projective B dont les fibres sont des variétés abéliennes (théorème 2.6) : ces petites déformations sont donc algébriques.

Remerciements. — Nous remercions vivement C. Voisin pour son aide dans l'élaboration de certains arguments présents dans ce travail. Nous remercions également les rapporteurs pour leurs remarques et conseils.

1. Une version relative du critère de Buchdahl

L'ingrédient principal est une version relative du critère de N. Buchdahl [Buc06, Buc08]. Dans les travaux en question, ce critère était utilisé pour donner une démonstration du résultat suivant (dû à Kodaira) ne s'appuyant pas (ou peu) sur la classification des surfaces kählériennes : toute surface kählérienne compacte admet des petites déformations projectives.

Théorème 1.1. — *Soit $\pi : X \to B$ une famille lisse, l'espace total de la famille étant supposé être une variété kählérienne compacte. Considérons une déformation relative de X/B de la forme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & U \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

et $o \in U$ un point lisse muni d'un isomorphisme $g^{-1}(\{o\} \times B) \simeq X$. Soit ω une métrique kählérienne sur X et supposons que la composition de l'application induite par le produit extérieur et de l'application de Kodaira-Spencer relative

$$T_{U,o} \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, T_{X/B}) \xrightarrow{\wedge[\omega]} \mathrm{H}^0(B, R^2\pi_*\mathscr{O}_X)$$

est surjective. La famille X/B admet alors des déformations $\pi_u : \mathscr{X}_u \to B$ (avec u arbitrairement proche de $o \in U$) dont toutes les fibres sont projectives. Plus précisément, il existe sur $\mathscr{X}_u$ une classe rationnelle de type $(1,1)$ dont la restriction aux fibres de π_u est une classe kählérienne.

Nous renvoyons à la référence [Ser06, Chap. 3.4.2] pour les notions de théories des déformations utilisées ici.

4. Rappelons qu'une fibration en tores n'a pas nécessairement de section ; nous renvoyons au début de la section 2.

Plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord, l'application de produit extérieur ci-dessus est en fait la composition du morphisme naturel

$$\mathrm{H}^1(X, T_{X/B}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(B, R^1\pi_* T_{X/B})$$

avec le produit extérieur par la classe $[\omega]$ vue comme un élément de

$$[\omega] \in \mathrm{H}^0(B, R^1\pi_*\Omega^1_{X/B}).$$

La condition peut aussi s'exprimer en examinant la composition :

$$T_{U,o} \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, T_X) \xrightarrow{\wedge\omega} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b}),$$

cette dernière devant alors être surjective sur l'espace

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b})\right).$$

D'autre part, d'après la version relative du critère de projectivité de Kodaira (voir [Cam06, Prop. 2.1]), les fibres de π sont d'ores et déjà projectives si l'application de restriction ci-dessus est identiquement nulle.

Enfin, il est important de noter que, dans une telle déformation relative, la structure complexe de B reste inchangée et que, d'un point de vue ensembliste, l'application π_u n'est autre que l'application π (la structure complexe de X n'est modifiée que dans la direction des fibres).

Bien que la démonstration du théorème 1.1 soit une extension aisée de celle du critère énoncé dans [Buc06, Buc08], nous la détaillons ici pour la commodité du lecteur.

Démonstration du théorème 1.1. — Les systèmes locaux $R^2(\mathrm{pr}_1 \circ g)_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$ et $R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$ sont munis par la construction de [Voi02, Chap. 10] d'une structure de $\mathbb{Q}$-variation de structure de Hodge, cette structure admettant une polarisation réelle si g en admet une — ce qui n'est pas nécessairement le cas. Même en l'absence d'une polarisation, nous pouvons munir $(\mathrm{pr}_1)_* R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$ d'une structure de $\mathbb{Q}$-variation de structure de Hodge telle que l'épimorphisme canonique

$$s : R^2(\mathrm{pr}_1 \circ g)_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}} \longrightarrow (\mathrm{pr}_1)_* R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$$

donné par la dégénérescence de la suite spectrale de Leray [Del68] préserve les filtrations de Hodge. La filtration de Hodge F de $(\mathrm{pr}_1)_* R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$ est juste l'image de la filtration de Hodge de $R^2(\mathrm{pr}_1 \circ g)_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$. Pour voir que cette filtration F est bien de Hodge (ce qui résulte de $F^i \cap \overline{F^{3-i}} = \{0\}$), il suffit de choisir $b \in B$ et d'observer que la composée $j \circ s$, où j est le *monomorphisme* naturel de $(\mathrm{pr}_1)_* R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$ dans $R^2 h^b_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}_b}$ (avec $h^b : \mathscr{X}_b = g^{-1}(U \times \{b\}) \to U$), est un morphisme de structure de Hodge.

Comme dans [Voi05, Prop. 3.3], le théorème résulte alors de la proposition 17.20 p. 410 de [Voi02] appliquée à la $\mathbb{Q}$-variation de structure de Hodge sous-jacente au système local $(\mathrm{pr}_1)_* R^2 g_*\mathbb{Q}_{\mathscr{X}}$. □

2. Application aux familles en tores

Dans la suite nous ferons la distinction suivante : une fibration en tores sera une submersion propre dont les fibres sont des tores complexes (quotients compacts de $\mathbb{C}^n$ par un réseau) alors qu'une fibration jacobienne sera une famille en tores munie d'une section (ce qui revient à prescrire l'origine). Nous adopterons également la terminologie suivante.

Définition 2.1. — Soit X/B une famille en tores (avec X une variété kählérienne compacte). Nous appellerons jacobienne relative de X/B la fibration jacobienne [5] Y/B où la variété Y est définie comme suit : si $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ est le système local formé par les H_1 des fibres et $\mathscr{E}$ le sous-fibré holomorphe formé par la partie de type $(-1,0)$ de $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathscr{O}_B$, la famille Y/B s'obtient en considérant le quotient de l'espace total de $\mathscr{E}$ par le réseau $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ (la section nulle passant au quotient).

Remarque 2.2. — Notons que la jacobienne relative est encore une variété kählérienne par un théorème de Varouchas [Var84] puisque l'on dispose d'un morphisme surjectif propre et lisse $X \times_B X \to Y$.

De par la définition même, les fibres de X/B et de Y/B sont naturellement isomorphes et cette identification se fait *via* un élément appartenant à la composante neutre du groupe d'automorphismes, c'est-à-dire une translation. La famille Y/B est donc obtenue à partir de X/B en effectuant des translations dans les fibres pour garantir l'existence d'une section holomorphe. Par exemple, si X est un tore de dimension 2 et de dimension algébrique $a(X) = 1$ (voir [BL04]), la réduction algébrique de X est une famille en tores X/B sur une courbe elliptique B et de fibre E (dont la structure complexe est fixée). La jacobienne relative de X/B n'est autre que $E \times B$.

La fibration X/B peut donc être vue comme un torseur sous le fibré en groupes qu'est la jacobienne relative Y/B. En particulier, si $\mathscr{Y}$ désigne le faisceau des sections de Y/B, il s'insère dans la suite exacte suivante (avec les notations de la définition 2.1) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{Y} \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Enfin, remarquons qu'une famille en tores X/B définit naturellement une classe dans le groupe $\mathrm{H}^1(B, \mathscr{Y})$. En effet, si s_i et s_j sont deux sections locales de X/B (définies sur des ouverts U_i et U_j), alors la différence $s_{i,j} := s_i - s_j$ est bien définie (indépendamment du choix d'une origine dans les fibres) et se trouve être une section locale de Y/B sur $U_i \cap U_j$. La collection des $s_{i,j}$ est un cocycle de Čech de degré 1 et fournit bien une classe

$$e_h(X/B) \in \mathrm{H}^1(B, \mathscr{Y}).$$

5. Il n'y a *a priori* pas unicité de la section mais la variété Y est cependant unique.

2.1. Topologie des familles en tores. — Nous allons maintenant décrire la topologie des familles en tores (avec espace total kählérien) et montrer qu'une famille en tores se déforme vers sa jacobienne relative (après changement de base étale fini). Certains des résultats montrés ci-dessous sont également présent dans le travail de Nakayama [Nak91].

Soit donc $\pi : X \to B$ une famille en tores (la variété différentiable sous-jacente aux fibres étant toujours notée F) dont l'espace total est une variété kählérienne compacte. La dégénérescence de la suite spectrale de Leray (*via* le théorème des cycles invariants) implique facilement (voir [Cla10]) que la suite des groupes fondamentaux :

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow 1 \tag{2.2}$$

est exacte. Rappelons-en brièvement la démonstration. Considérons la fibration (de fibre F) $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to \widetilde{B}$ obtenue par image réciproque sur $\widetilde{B}$ revêtement universel de B. La suite exacte d'homotopie pour cette fibration s'écrit :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(\widetilde{X}) \longrightarrow 0,$$

où K est un sous-groupe de $\pi_1(F)$, en particulier abélien sans torsion. En la dualisant, nous obtenons :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\widetilde{X}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

Or, le théorème des cycles invariants (voir par exemple [Voi02, th. 16.18, p. 381]) affirme que l'application de restriction $\mathrm{H}^1(\widetilde{X}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbb{Q})$ est surjective [6]. Comme K est abélien sans torsion, cela implique que K est trivial et le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de X (dans un revêtement l'application est injective au niveau du π_1).

Il est bien connu qu'une suite exacte comme (2.2) détermine une classe d'extension

$$e(X/B) \in \mathrm{H}^2(\pi_1(B), \pi_1(F)).$$

D'autre part, si l'on considère la jacobienne relative $Y \to B$ (voir ci-dessus), la famille initiale détermine un élément de $e_h(X/B) \in \mathrm{H}^1(B, \mathscr{Y})$. Ces deux classes de cohomologie sont reliées entre elles de la façon suivante. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite courte (2.1) fournit une flèche naturelle

$$\mathrm{H}^1(B, \mathscr{Y}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(B, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}).$$

Notons $e_{\mathrm{top}}(X/B)$ l'image de $e_h(X/B)$ dans $\mathrm{H}^2(B, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}})$. Sous l'injection naturelle

$$\mathrm{H}^2(\pi_1(B), \pi_1(F)) \hookrightarrow \mathrm{H}^2(B, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}),$$

l'image de $e(X/B)$ n'est autre que la classe $e_{\mathrm{top}}(X/B)$.

6. Nous pouvons en effet appliquer ce résultat puisque le morphisme $\widetilde{\pi}$ est propre et que l'on dispose d'une classe dont la restriction aux fibres est une classe kählérienne (par exemple l'image réciproque sur $\widetilde{X}$ d'une classe kählérienne provenant de X). On pourra se reporter à la remarque 16.16 de [Voi02].

Il résulte du théorème principal de [Ara11] que les classes e et e_{top} sont des classes de torsion (c'est à nouveau une conséquence de la dégénérescence [7] de la suite spectrale de Leray). Cette remarque suffit à montrer que la suite exacte (2.2) est scindée après revêtement étale fini de la base (et même que X/B admet une section différentiable après ce même changement de base). En effet, si n désigne l'ordre de torsion de la classe e, la suite longue associée à la suite courte de système locaux

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\times n} \mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

montre que la classe e provient en fait de

$$\mathrm{H}^1(B, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{H}^1(\pi_1(B), \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}).$$

Le groupe abélien sous-jacent à $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ étant fini, nous pouvons considérer un sous-groupe d'indice fini G de $\pi_1(B)$ qui agit trivialement sur $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$. Le groupe de cohomologie correspondant s'identifie alors à

$$\mathrm{H}^1(G, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{Hom}(G, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}/n\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}).$$

En considérant le revêtement correspondant au noyau du morphisme induit par la classe $e_{|G}$, on obtient le scindage voulu. Résumons la discussion précédente dans l'énoncé suivant.

Proposition 2.3. — *Soit X/B une famille en tores dont l'espace total est un variété kählérienne compacte. Après changement de base étale fini, la classe $e_{\mathrm{top}}(X/B)$ s'annule et cette famille possède une section (différentiable) ; en particulier, le groupe fondamental de X devient un produit semi-direct*

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \rightleftarrows \pi_1(B) \longrightarrow 1.$$

Remarque 2.4. — L'hypothèse concernant le caractère kählérien de l'espace total est bien entendu essentielle comme le montre l'exemple des surfaces de Hopf (celles admettant une fibration elliptique sur $\mathbb{P}^1$) ou celui de la variété d'Iwasawa (qui admet une fibration elliptique sur un tore complexe de dimension 2). Dans le cas des surfaces de Hopf, le groupe fondamental de la fibre ne s'injecte pas dans celui de l'espace total alors que dans l'exemple de la variété d'Iwasawa, la suite exacte n'est pas scindée. C'est donc bien à travers la dégénérescence de la suite spectrale de Leray que l'hypothèse Kähler intervient de façon cruciale.

7. Dans notre cas, l'argument d'Arapura se réduit bien à cela. En effet, la classe d'extension $e(X/B)$ est (au signe près) $d_2(\mathrm{id})$ où d_2 est la différentielle

$$d_2 : E_2^{1,0} = \mathrm{H}^0(\pi_1(B), \mathrm{H}^1(\pi_1(F), V)) = \mathrm{Hom}_{\pi_1(X)}(V, V) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\pi_1(B), V) = E_2^{2,0}$$

de la suite spectrale de Hochschild-Serre déduite de la suite exacte (2.2) pour le $\pi_1(X)$-module $V := \pi_1(F)$. Le groupe $\pi_1(F)$ étant abélien, V est en fait un système local défini sur B. La suite spectrale de Leray associée au morphisme $f : X \to B$ et au faisceau $f^*V_{\mathbb{Q}}$ dégénère en E_2 et ceci montre bien que $e(X/B)$ est nulle en cohomologie à coefficients rationnels ou, en d'autres termes, que c'est bien une classe de torsion.

2.2. Famille en tore et fibration jacobienne. — La classe $e(X/B)$ mesure également l'obstruction à déformer X/B vers sa jacobienne relative Y/B.

Proposition 2.5. — *Soit X/B une famille de tores. Si $e(X/B) = 0$, X/B et Y/B sont déformations l'une de l'autre.*

Démonstration. — Si la classe $e(X/B)$ s'annule dans $\mathrm{H}^2(B, \mathrm{H}_{\mathbb{Z}})$, la suite longue associée à la suite (2.1) montre que $e_h(X/B)$ provient de $\mathrm{H}^1(B, \mathscr{E})$. Or, une classe dans le groupe $\mathrm{H}^1(B, \mathscr{E})$ correspond à une extension

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow 0$$

du fibré $\mathscr{E}$ par le fibré trivial. A nouveau, nous pouvons faire opérer le réseau $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{F}$ l'espace total de $\mathscr{F}$ par translation. La variété complexe obtenue admet naturellement une submersion (propre) sur l'espace total de $\mathscr{O}_B$:

$$\varepsilon : \mathbb{F}/\mathrm{H}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Il est clair que le fibre de ε au-dessus de 0 n'est autre que Y ; il n'est pas moins évident que celle au-dessus de 1 s'identifie à X. □

2.3. Déformations relatives des fibrations jacobiennes

Théorème 2.6. — *Soit $\pi : X \to B$ une fibration jacobienne, X étant toujours supposée kählérienne compacte. La famille X/B admet des petites déformations de telle sorte que les fibres de π soient des variétés abéliennes. En particulier, si B est une variété projective, X admet des petites déformations projectives.*

Avant de donner la démonstration de ce dernier résultat, énonçons-en la conséquence suivante qui fût la motivation principale de cette note.

Corollaire 2.7. — *Si $\pi : X \to B$ est une famille en tores avec X kählérienne compacte et si B est de plus une variété projective, après revêtement étale fini X peut se déformer en une variété projective ; en particulier, son groupe fondamental est virtuellement celui d'une variété projective.*

Démonstration du corollaire 2.7. — Il suffit dans un premier temps d'appliquer la proposition 2.3 pour annuler $e_{\mathrm{top}}(X/B)$ après un revêtement fini de B. La proposition 2.5 montre que dans cette situation X/B se déforme à sa jacobienne relative Y/B. Cette famille étant munie d'une section et Y étant encore kählérienne (remarque 2.2), appliquons le théorème 2.6 à la famille Y/B : nous pouvons déformer Y en une famille en tores dont les fibres et la base sont algébriques. L'espace total de cette déformation est alors algébriquement connexe (car la fibration est toujours munie d'une section) donc algébrique [8] d'après [Cam81]. □

8. Nous pouvons également raisonner de la manière suivante : les arguments ci-dessus montrent qu'après déformation il existe une classe $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Q})$ dont la restriction aux fibres est celle d'une classe de Hodge. Or, dans le cas des familles de tores, la dégénérescence de la suite de Leray fournit

Démonstration du théorème 2.6. — Comme nous considérons une fibration jacobienne avec espace total kählérien, les déformations relatives de la structure complexe sont les mêmes que celles du système local $\mathscr{H}_R := (\mathrm{H}_1(X_b, \mathbb{R}))_{b\in B}$. Nous cherchons ici à déformer la structure complexe I donnée par la théorie de Hodge usuelle

$$(\mathscr{H}^*_{\mathbb{C}})^{1,0} := \pi_*\Omega^1_{X/B}. \tag{2.3}$$

Nous allons montrer que d'une part certains éléments de

$$A_{\mathbb{R}} = \mathrm{H}^0(B, \mathscr{E}nd(\mathscr{H}_{\mathbb{R}}))$$

s'identifient à des déformations infinitésimales et d'autre part que ces déformations ne sont pas obstruées. Il nous restera à identifier leurs images dans $\mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b})$ pour constater que le critère 1.1 s'applique.

Soit donc φ un élément de $A_{\mathbb{R}}$. Nous souhaitons déformer la structure complexe I, c'est-à-dire construire un développement (au moins formel) de la forme :

$$I_t = I + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \cdots$$

avec $I_t^2 = -1$ et $\varphi_1 = \varphi$. La condition à l'ordre 1 est la suivante : φ doit anti-commuter avec I. De façon plus intrinsèque, le théorème des cycles invariants permet de munir

$$A_{\mathbb{R}} = \big(\mathrm{H}_1(X_b, \mathbb{R}) \otimes \mathrm{H}^1(X_b, \mathbb{R})\big)^{\pi_1(B,b)}$$

d'une structure de Hodge de poids 0 et les éléments de $A_{\mathbb{R}}$ qui sont de type $(1, -1)$ ou $(-1, 1)$ sont exactement ceux qui anti-commutent avec I. Il nous reste à vérifier que ces déformations infinitésimales ne sont pas obstruées (ceci est évident dans le cas des tores complexes mais ici nous devons prendre en compte l'action du groupe de monodromie) ; c'est l'objet du lemme 2.8 ci-dessous.

Les déformations infinitésimales comme ci-dessus peuvent s'obtenir de la façon suivante ; considérons pour cela l'application de restriction

$$j_b^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X_b, \mathbb{R})$$

et remarquons que, X_b étant un tore, ce dernier groupe de cohomologie s'identifie à

$$\mathrm{H}^2(X_b, \mathbb{R}) = \bigwedge^2 \mathrm{H}_1(X_b, \mathbb{R})^*.$$

Nous pouvons donc considérer les éléments de l'image de j_b^* comme des formes bilinéaires sur le système local $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$ ou encore comme des morphismes de $\mathscr{H}_{\mathbb{R}} \to \mathscr{H}^*_{\mathbb{R}}$. Enfin, le choix d'une classe kählérienne globale $[\omega]$ fournit un isomorphisme de $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$ vers son dual et nous pouvons considérer des éléments de la forme

$$\varphi = [\omega]^{-1} \circ \eta \in A_{\mathbb{R}} = \mathrm{H}^0(B, \mathscr{E}nd(\mathscr{H}_{\mathbb{R}}))$$

---

en fait une décomposition canonique en sous-structures de Hodge

$$H^k(X, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H^i(B, R^j f_*\mathbb{Q})$$

(voir [Voi11]). Nous pouvons donc supposer que α est de type (1,1) et la classe $\alpha + f^*(\omega_B)$ est donc une classe de Hodge (avec ω_B polarisation sur B).

avec $\eta \in \mathrm{Im}(j_b^*)$. D'après le lemme 2.8 ci-dessous, les déformations infinitésimales ainsi construites ne sont pas obstruées et il existe donc une déformation relative

$$g : \mathscr{X} \longrightarrow B \times U$$

de $X/B \simeq g^{-1}(B \times \{o\})$ avec $o \in U$ un point lisse de telle sorte que φ s'identifie à un vecteur tangent de $T_{U,o}$. Il est alors clair que la contraction de (l'image par l'application de Kodaira-Spencer de) φ avec la classe $[\omega]$ n'est autre que $\eta^{0,2}$ vue dans $\mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b})$ (on se reportera à la discussion qui suit l'énoncé du théorème 1.1). La composition des applications

$$T_{U,o} \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, T_X) \xrightarrow{\wedge\omega} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b})$$

a donc pour image le sous-espace

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X_b, \mathscr{O}_{X_b})\right).$$

Le théorème 1.1 s'applique donc et X admet des déformations (arbitrairement petites) au-dessus de B dont les fibres sont projectives [9].

Nous avons utilisé ci-dessus le lemme suivant.

Lemme 2.8. — *Reprenons les notations ci-dessus. Les déformations infinitésimales données par $A_{\mathbb{R}} \cap (A_{\mathbb{C}}^{1,-1} \oplus A_{\mathbb{C}}^{-1,1})$ ne sont pas obstruées.*

Démonstration. — Considérons le groupe $G := \mathrm{Aut}(\mathscr{H}_{\mathbb{R}})$. Le groupe G est le groupe des inversibles de l'algèbre $A_{\mathbb{R}} = \mathrm{End}(\mathscr{H}_{\mathbb{R}})$ et son complexifié $G_{\mathbb{C}}$ est le groupe des endomorphismes inversibles de $A_{\mathbb{C}} = \mathrm{End}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}})$. Pour $g \in G$ on peut construire $I^g = gIg^{-1}$ qui est une structure complexe sur $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$ définissant automatiquement une famille holomorphe (*i.e.* la partie de type $(1,0)$ est un sous-fibré holomorphe de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$) et $X^g \to B$ est une famille de tores sur B.

En effet, la connexion plate sur $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$ définit un scindage différentiable $T_X = \pi^* T_B \oplus T_{X|B} \simeq \pi^* T_B \oplus \pi^* \mathscr{H}_{\mathbb{R}}$. La structure presque complexe de X se scinde de façon compatible sous la forme $\pi^* J_B \oplus \pi^* J_{X|B}$ où J_B est la structure presque complexe de B et $J_{X|B}$ est la structure complexe (2.3) sur $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$. Le revêtement universel $\widetilde{X} \to X$ est (par transport parallèle basé en $\widetilde{b} \in B$) difféomorphe à $\widetilde{B} \times \mathscr{H}_{\mathbb{R},\widetilde{b}}$ et sa structure presque complexe se scinde de façon compatible en $J_{\widetilde{X}} = J_{\widetilde{B}} \oplus J_{\mathscr{H}}$ où les deux structures presque complexes ne dépendent que des paramètres de $\widetilde{B}$.

Si $g \in \mathrm{Aut}(\mathscr{H}_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{Aut}(\mathscr{H}_{\mathbb{R},\widetilde{b}})$ on définit une structure presque complexe J^g sur X par la formule $J^g := \pi^* J_B \oplus \pi^* g.J_{X|B}.g^{-1}$. Son relèvement $J^g_{\widetilde{X}}$ à $\widetilde{X}$ est manifestement égal à $\phi^{-1}.J_{\widetilde{X}}$ où $\phi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ est le difféomorphisme $(b,h) \mapsto (b, g.h)$ — on utilise ici de façon cruciale que g ne dépend pas de b. Le théorème de Newlander-Nirenberg implique alors que $J^g_{\widetilde{X}}$ donc J^g est intégrable.

Les endomorphismes de $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$ commutant à I forment exactement la partie de type $(0,0)$ de la structure de Hodge réelle de poids 0 sur $A_{\mathbb{R}}$ (structure de Hodge dont

9. Rappelons que si la partie de type $(0,2)$ de l'image de j_b^* est nulle, nous savons déjà que les fibres sont projectives par [Cam06, Prop. 2.1] et il n'y a donc pas besoin de déformer la fibration.

les composants possiblement non triviaux sont de type $(-1,1)$, $(0,0)$ et $(1,-1)$). Il s'ensuit que le groupe G^0 des automorphismes commutant à I n'est autre que $G \cap F^0 A_{\mathbb{C}}$ qui est un ouvert dans $A_{\mathbb{R}}^{0,0}$. Le groupe des inversibles de $F^0 A_{\mathbb{C}}$ est lui noté $F^0 G_{\mathbb{C}}$.

On constate alors que $G/G^0 \to G_{\mathbb{C}}/F^0 G_{\mathbb{C}}$ est un homéomorphisme local ce qui fournit une structure complexe sur $D = G/G^0$. De plus, l'espace tangent (au point base correspondant à I) à D s'identifie bien aux déformations infinitésimales $A_{\mathbb{R}} \cap (A_{\mathbb{C}}^{1,-1} \oplus A_{\mathbb{C}}^{-1,1})$.

On regarde l'espace total $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}/B$ du complexifié de $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}$. Les translations par le sous-fibré holomorphe V et le système local $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ fournissent une relation d'équivalence holomorphe (qui localement sur B est la relation d'équivalence sous-jacente à une action de groupe) dont le quotient est X/B. On définit alors un automorphisme holomorphe ϕ de fibrés vectoriels $(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}/B) \times G_{\mathbb{C}}$ par $(h,g) \mapsto (gh,g)$ ce qui permet de définir le sous-fibré holomorphe $\phi \cdot V \subset \mathrm{H}_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}/B \times G_{\mathbb{C}}$. On peut faire agir le système local $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathscr{H}_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}/B \times G_{\mathbb{C}}$ sans tordre par G c'est-à-dire en prenant pour chaque $g \in G_{\mathbb{C}}$ l'action originelle sur $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}$. Le quotient de $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ par la relation d'équivalence engendrée par $\phi \cdot V$ et $\mathrm{H}_{\mathbb{Z}}$ fournit au-dessus d'un voisinage U de l'identité dans G une famille holomorphe de déformations de X/B qui descend manifestement à un voisinage de la classe de l'identité dans D et réalise les déformations infinitésimales prescrites. □

Ceci conclut également la démonstration du théorème 2.6. □

Question 2.9. — Nous ne savons pas si la conclusion du théorème 2.7 persiste sans remplacer X par un revêtement étale fini. Comme ce revêtement provient de la base de la fibration $f : X \to B$, il faudrait étudier le problème de façon équivariante, c'est-à-dire lorsqu'un groupe fini Γ agit à la fois sur X et B et que f est équivariante pour les actions considérées. L'adaptation à ce cadre équivariant du théorème 2.6 ne semble en effet pas immédiate.

Notons que le cas où B est un point est traité dans l'article [BR11] et montre en particulier que la question 0.1 a une réponse positive dans le cas virtuellement abélien : un groupe kählérien virtuellement abélien est aussi le groupe fondamental d'une variété projective lisse.

Références

[Ara11] D. Arapura – « Homomorphisms between Kähler groups », in *Topology of algebraic varieties and singularities*, Contemp. Math., vol. 538, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, p. 95–111.

[BR11] O. Baues & J. Riesterer – « Virtually abelian Kähler and projective groups », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **81** (2011), no. 2, p. 191–213.

[BL04] C. Birkenhake & H. Lange – *Complex abelian varieties*, 2ᵉéd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 302, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Buc06] N. Buchdahl – « Algebraic deformations of compact Kähler surfaces », *Math. Z.* **253** (2006), no. 3, p. 453–459.

[Buc08] ———, « Algebraic deformations of compact Kähler surfaces. II », *Math. Z.* **258** (2008), no. 3, p. 493–498.

[Cam81] F. Campana – « Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 2, p. 187–223.

[Cam06] ———, « Isotrivialité de certaines familles kählériennes de variétés non projectives », *Math. Z.* **252** (2006), no. 1, p. 147–156.

[CCE13] F. Campana, B. Claudon & Ph. Eyssidieux – « Représentations linéaires des groupes kählériens : factorisations et conjecture de Shafarevich linéaire », `arXiv:1302.5016`, 2013.

[Cla10] B. Claudon – « Invariance de la Γ-dimension pour certaines familles kählériennes de dimension 3 », *Math. Z.* **266** (2010), no. 2, p. 265–284.

[Del68] P. Deligne – « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1968), no. 35, p. 259–278.

[Nak91] N. Nakayama – « Compact Kähler manifolds whose universal covering spaces are biholomorphic to $\mathbb{C}^n$ », preprint RIMS n° 1230, `citeseerx`, 1991.

[Ser06] E. Sernesi – *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Var84] J. Varouchas – « Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres », *Invent. Math.* **77** (1984), no. 1, p. 117–127.

[Voi02] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Voi04] ———, « On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds », *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, p. 329–343.

[Voi05] ———, « Recent progresses in Kähler and complex algebraic geometry », in *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, p. 787–807.

[Voi06] ———, « On the homotopy types of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem », *J. Differential Geom.* **72** (2006), no. 1, p. 43–71.

[Voi11] ———, « Chow rings, decomposition of the diagonal and the topology of families », Notes pour les Leçons Hermann Weyl, disponible sur la page `http://www.math.polytechnique.fr/~voisin`, 2011.

Manuscrit reçu le 5 mai 2014
accepté le 2 septembre 2014

Fréderic Campana, Institut Élie Cartan Nancy, UMR 7502, Université de Lorraine
B.P. 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail : `Frederic.Campana@univ-lorraine.fr`

Benoît Claudon, UMI CNRS/IMPA
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, 22460-320, Rio de Janeiro, Brasil
E-mail : `Benoit.Claudon@univ-lorraine.fr`
Url : `http://iecl.univ-lorraine.fr/~Benoit.Claudon/`

Philippe Eyssidieux, Institut Fourier, Université Grenoble 1
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France
E-mail : `Philippe.Eyssidieux@ujf-grenoble.fr`
Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eyssi/`